



## Identification de fissures droites depuis des mesures frontière incomplètes

Amel Ben Abda, Moez Kallel, Juliette Leblond, Jean-Paul Marmorat

### ► To cite this version:

Amel Ben Abda, Moez Kallel, Juliette Leblond, Jean-Paul Marmorat. Identification de fissures droites depuis des mesures frontière incomplètes. RR-4153, INRIA. 2001. inria-00072471

**HAL Id: inria-00072471**

**<https://inria.hal.science/inria-00072471>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# *Identification de fissures droites depuis des mesures frontière incomplètes*

Amel BEN ABDA, Moez KALLEL, Juliette LEBLOND, Jean-Paul MARMORAT

**N° 4153**

Mars 2001

THÈME 4



*rapport  
de recherche*



# Identification de fissures droites depuis des mesures frontière incomplètes

Amel BEN ABDA\*, Moez KALLEL<sup>†</sup>, Juliette LEBLOND<sup>‡</sup>, Jean-Paul  
MARMORAT<sup>§</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projets MIAOU

Rapport de recherche n° 4153 — Mars 2001 — 21 pages

**Résumé :** Nous nous intéressons à la détection et à l'identification de fissures rectilignes à l'intérieur d'un conducteur isotrope plan (2D) à partir de mesures de la solution du problème de Neumann pour le Laplacien effectuées sur une partie seulement de la frontière extérieure du domaine. Nous procédons d'abord à l'extension à toute la frontière d'une estimation de la trace de la solution, au moyen de méthodes constructives d'analyse complexe et d'approximation issues de [13], puis à la localisation de la fissure, en utilisant les algorithmes proposés dans [17].

**Mots-clés :** Problèmes inverses géométriques, Laplacien 2D, détection et localisation de fissures, fonctions analytiques et méromorphes, approximation méromorphe uniforme

\* ENIT-Lamsin, BP 37, 1002 Tunis-Belvédère, Tunisie, amel.benabda@enit.rnu.tn

<sup>†</sup> IPEIT & ENIT-Lamsin, BP 37, 1002 Tunis-Belvédère, Tunisie, moez.kallel@ipeit.rnu.tn

<sup>‡</sup> INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France, leblond@sophia.inria.fr

<sup>§</sup> CMA-EMP, INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France, Jean-Paul.Marmorat@sophia.inria.fr

# Cracks identification from incomplete boundary data

**Abstract:** We are concerned with nondestructive control issues, namely detection and recovery of cracks in a planar (2D) isotropic conductor from partial boundary measurements of a solution to the Laplace-Neumann problem. We first build an extension of that solution to the whole boundary, using constructive approximation techniques from [13], and then use localisation algorithms from [17].

**Key-words:** Geometrical inverse problems, 2D Laplace operator, cracks detection and recovery, analytic and meromorphic functions, uniform meromorphic approximation

# 1 Introduction

Nous considérons ici le problème inverse géométrique consistant à détecter et localiser la présence de fissures dans un matériau depuis des mesures sur la frontière. Ce type de problèmes survient dans de nombreuses applications industrielles relevant du contrôle non destructif (imagerie et tomographie, prospection de sous-sols, surveillance, par exemple). Les phénomènes physiques mis en jeu et les mesures effectuées peuvent être de nature thermique, électrostatique, acoustique, ou élastique. Cependant, le cadre de ce travail se limite aux phénomènes régis par l'équation de Laplace en dimension 2 (2D). Pour plus de simplicité, nous ferons références aux différentes quantités physiques dans le contexte thermique. Le problème d'identification de fissures *rectilignes* enfouies dans un milieu 2D a initialement été considéré dans [24]. Les auteurs y établissent la propriété d'unicité d'une fissure correspondant à la mesure des températures associées à *deux* flux spécifiques, que la fissure soit parfaitement isolante ou conductrice (ces deux cas se déduisant l'un de l'autre par conjugaison harmonique). Ce résultat d'identifiabilité reste vrai pour une *famille* de fissures intérieures, [5]. Dans le cas d'une famille de fissures débouchantes, la mesure de la température correspondant à un flux *unique* (sélectionné a priori) suffit à assurer le résultat d'unicité, [8, 23]. Concernant la stabilité de tels problèmes inverses, un résultat partiel et local a été établi dans [24] pour le cas de fissures droites intérieures ainsi, dans [3], que des résultats logarithmiques pour des fissures courbes suffisamment régulières (les estimations obtenues étant meilleures si les fissures sont droites). Des propriétés locales de stabilité lipschitzienne ont de plus été prouvées dans [8] pour une fissure droite débouchante, ainsi que dans [6] pour une fissure intérieure. Peu de résultats existent en 3D. Notons toutefois dans [4] une propriété d'unicité pour une fissure parfaitement conductrice (ou parfaitement isolante, sous l'hypothèse que la fissure est plane). Les procédures existantes pour l'identification de la fissure à proprement parler (localisation, détermination) nécessitent généralement la résolution itérative du problème aux limites (problème direct) correspondant, voir [6, 36]. Cependant, dans le cas particulier de fissures planes (dans un domaine 3D) ou droites (en 2D), la notion d'écart à la réciprocité introduite dans [7] a permis de prouver que celles-ci sont complètement déterminées par des données *complètes* (flux et température connus sur *tout* le bord extérieur du domaine). De plus, des formules d'inversion permettent d'identifier le plan (ou la droite) contenant la (ou les) fissures. Ce travail a donné lieu à des procédés d'identification non itératifs (ne nécessitant aucune résolution du problème direct) et, par là même, très économiques. Ces procédures sont décrites et mises en oeuvre pour l'équation de Laplace dans [9, 17] et, pour le contrôle de systèmes élastiques, dans [16].

Le présent travail est consacré à l'identification de fissures intérieures dans un conducteur isotrope plan (2D)  $\Omega$  depuis des données mesurées sur *une partie* seulement du bord extérieur  $\partial\Omega$ . On suppose en effet que l'on dispose sur un sous-ensemble  $K \subset \partial\Omega$  de la trace  $u_K$  d'une solution (température) de l'équation de Laplace dans  $\Omega$  privé de l'éventuelle fissure, ainsi que de la donnée d'une condition de Neumann (flux de chaleur) sur  $\partial\Omega$ . Il s'agit-là d'une hypothèse réaliste où une partie seulement de la frontière est accessible aux mesures. Le but de ce travail est l'obtention d'un algorithme robuste pour la résolution effective de ce problème inverse, pour une fissure rectiligne.

Nous décrivons dans ce cadre une stratégie d'identification de fissures en deux temps.

**I/** La première étape, d'extension des données, consiste à trouver un prolongement  $u$  à tout le bord  $\partial\Omega$  de la trace mesurée  $u_K$  de la solution, compte-tenu de la connaissance du flux  $\Phi$ . **II/** Lorsque la fissure est *rectiligne*, sa détermination depuis le prolongement  $u$  des mesures à  $\partial\Omega$  obtenu en **I** fait alors usage du concept d'écart à la réciprocité et consiste à son tour en deux

étapes successives: *i*) identification explicite de la droite portant la fissure, *ii*) localisation sur cette droite, par identification des extrémités de la fissure.

Dans la suite de cette introduction, nous précisons le problème considéré et donnons quelques indications concernant les algorithmes de résolution de l'étape **II** issus de [17]. Puis nous détaillons en section 2 quelques outils d'analyse complexe et d'approximation utilisés ici pour traiter l'étape **I**. Les algorithmes subséquents sont décrits, avec certaines propriétés de convergence, et illustrés numériquement en section 3.

## 1.1 Problème direct

On considère les fissures intérieures modélisées par des courbes simples  $\sigma$  de classe  $C^2$  incluses dans un ouvert régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , simplement connexe. On se donne un flux de chaleur de densité  $\Phi \in L^2(\partial\Omega)$ , non identiquement nul le long de  $\partial\Omega$  et satisfaisant :

$$\int_{\partial\Omega} \Phi ds = 0,$$

si  $s$  est l'abscisse curviligne sur  $\partial\Omega$ . On considère alors le problème suivant.

*Etant donnés  $\Omega$ ,  $\sigma \subset \Omega$  et  $\Phi$  comme ci-dessus, trouver une solution  $u$  de :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \sigma \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0 \quad \text{sur } \sigma \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & \Phi \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

La seconde équation correspond à une condition de flux nul sur  $\sigma$  ce qui signifie physiquement que la fissure  $\sigma$  est parfaitement isolante. Ce problème admet une solution  $u$  (température), unique dès que l'on ajoute la condition de normalisation suivante, [21] :

$$\int_{\partial\Omega} u ds = 0.$$

Sous les hypothèses précédentes, on déduit de résultats de régularité classiques [10, 24] que la trace au bord de la solution  $u$  appartient à la classe de Hölder  $C^{1/2}(\partial\Omega)$  ainsi que le saut de température sur la fissure:  $[u] = u^+ - u^- \in C^{1/2}(\sigma)$ .

Notons que l'on peut aussi bien considérer un problème analogue pour une fissure parfaitement conductrice en remplaçant la condition sur  $\sigma$  dans (1) par  $u = cte$ . Toutefois, pour que ce qui suit s'applique dans ce cas aussi, il faut imposer à  $u$  une condition supplémentaire de flux nul autour de la fissure, et ce afin que la fonction harmonique conjuguée soit monovaluée dans  $\Omega \setminus \sigma$ , voir [2, 5].

## 1.2 Problème inverse

Le problème inverse étudié ici concerne l'identification (géométrique) d'une fissure  $\sigma \subset \Omega$  depuis la donnée du flux  $\Phi$  et d'une mesure  $u_K$  de la solution de (1) sur une partie  $K$  du bord, supposée accessible et de mesure positive. Autrement dit :

*Etant donnés  $\Omega$ ,  $K \subset \partial\Omega$ ,  $\Phi$  et  $u_K$ , trouver  $\sigma \subset \Omega$  telle que la solution  $u$  de (1) vérifie :*

$u|_K = u_K$ .

Dans le cas 2D, la propriété d'identifiabilité d'une fissure de régularité  $C^2$  par un choix de deux flux particuliers et en supposant connue la trace de  $u$  sur une partie du bord est établie dans [24]. Pour des données complètes (si  $K = \partial\Omega$ ) et dans le cas d'une ou plusieurs fissures portées par une même droite, un flux unique suffit à en assurer l'unicité, dès que ce flux induit une discontinuité  $[u]$  du champs de température à moyenne non nulle sur la fissure, voir [7]. Si la sélection a priori d'un tel flux est une question ouverte, notons toutefois qu'il est facile de tester a posteriori si cette condition est vérifiée, en exploitant les données surdéterminées sur  $\partial\Omega$ . La preuve de ce résultat est constructive et fournit les bases de deux algorithmes d'identification développés dans [17], que l'on utilise ici afin de résoudre l'étape **II**. On les décrit brièvement ci-dessous ainsi qu'à la section 3.1.

Ces procédés reposent sur la notion d'écart à la réciprocity et l'exploitation de la quantité suivante, que l'on peut calculer depuis des informations recueillies sur  $\partial\Omega$ :

$$RG(v) = \int_{\partial\Omega} (\Phi v - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds, \quad (2)$$

pour les fonctions  $v$  harmoniques dans  $\Omega$ . En effet, la deuxième formule de Green relie cette intégrale à la géométrie  $\sigma$  inconnue, puisque :

$$RG(v) = \int_{\sigma} [u] \frac{\partial v}{\partial n} d\tau,$$

si l'on désigne par  $\tau$  l'abscisse curviligne sur  $\sigma$ . La détermination de la droite  $D$  portant la fissure se fait suivant les formules d'inversion données dans [7]. Cette ligne étant identifiée, il s'agit alors de déterminer les extrémités de la fissure. Pour cela deux algorithmes non itératifs ont été décrits et mis en oeuvre dans [17], qui restent adaptés au cas de plusieurs fissures *rectilignes* et *alignées*. Le premier algorithme consiste à reconstruire le saut  $[u]$  de la température  $u$  sur  $D$ , par un développement suivant la base orthogonale des polynômes de Legendre. La détermination de  $\sigma$  se fait par identification du support de  $[u]$ . Le deuxième algorithme, désigné par (RGE), reconstruit les extrémités de la fissure par la détermination du minimum de la fonctionnelle  $\tilde{\sigma} \mapsto RG^2(w_{\tilde{\sigma}})$ , où  $\tilde{\sigma}$  représente un intervalle de  $D$  (une fissure "fictive"),  $w_{\tilde{\sigma}}$  une fonction harmonique dans  $\Omega \setminus \tilde{\sigma}$  telle que  $RG(w_{\sigma}) = 0$ , voir section 3.1.

### 1.3 Hypothèses, notations et définitions

Dans la suite, nous supposons  $\Omega = \mathbb{D}$ , le disque unité ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ ; ainsi,  $\partial\Omega = \mathbb{T}$  le cercle unité. Ceci se fait sans perte de généralité, puisque tout domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplement connexe est conformément équivalent à  $\mathbb{D}$ . Si de plus la frontière  $\partial\Omega$  est une courbe de Jordan de classe  $C^{1,\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$  (admettant une paramétrisation dont la dérivée appartient à  $C^\beta(\partial\Omega)$ , voir ci-dessous), la transformation conforme en question admet une extension de classe  $C^{1,\beta}$  à  $\partial\Omega$ , [19]. Dorénavant,  $K$  désignera donc un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$  de mesure de Lebesgue strictement positive de même que son complémentaire  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $L^p(\mathbb{T})$  l'espace de Lebesgue classique muni de sa norme  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$  et  $H^p$  l'espace de Hardy du disque, ensemble des fonctions analytiques dans  $\mathbb{D}$  et bornées en norme  $L^p$  sur les cercles centrés en 0 et de rayon  $r < 1$ . Muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$ , l'espace  $H^p$  est un espace de Banach que l'on peut identifier au sous-espace fermé de  $L^p(\mathbb{T})$  des fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls. On trouvera dans [22, 25, 26, 27, 35] les définitions et propriétés précises des espaces de Hardy.



On notera  $d$  la distance (induite par la norme) dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Soit  $R_N$  le sous ensemble de  $L^\infty(\mathbb{T})$  constitué des fonctions rationnelles (sans pôle sur  $\mathbb{T}$ ) et admettant au plus  $N$  pôles dans  $\mathbb{D}$ . Pour tout  $E \subset \mathbb{T}$ ,  $C(E)$  désigne l'espace des fonctions à valeurs complexes continues sur  $E$ ,  $\chi_E$  la fonction caractéristique de  $E$ ,

$$L^p(E) = \{f, \chi_E f \in L^p(\mathbb{T})\},$$

muni de la norme  $\|f\|_{L^p(E)} = \|\chi_E f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . La fonction concaténée valant  $f$  sur  $E$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus E$  sera notée

$$f \vee h = \chi_E f + \chi_{\mathbb{T} \setminus E} h.$$

Etant donnée  $f$  dans  $C(E)$ , on définit son module de continuité par

$$\omega_f(\delta) = \sup_{(x,y) \in E \times E, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Pour  $0 < \alpha < 1$ , on désigne par  $C^\alpha(E)$  la classe de Hölder-Zygmund :

$$C^\alpha(E)(K) = \{f \in C(E), \omega_f(\delta) = O(\delta^\alpha)\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\alpha,E} = \|f\|_{L^\infty(E)} + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta^\alpha}.$$

On introduit le sous-ensemble  $\lambda_\alpha(E)$  des fonctions  $f \in C^\alpha(E)$  telles que

$$\frac{\omega_f(\delta)}{\delta^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0.$$

Notons que la classe de Hölder-Zygmund *séparable*  $\lambda_\alpha(E)$  coïncide avec l'adhérence des polynômes trigonométriques dans  $C^\alpha(E)$ . On définit aussi

$$\lambda_\alpha^+(E) = \{f \in \lambda_\alpha(E), f \geq 0\}, \quad \lambda_\alpha^{+,0}(E) = \{f \in \lambda_\alpha^+(E), f = 0 \text{ sur } \partial E\},$$

et, finalement,

$$\mathcal{M} = \{M \in L^\infty(\mathbb{T} \setminus K), M \geq 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K\}, \quad \mathcal{M}_* = \{M \in \mathcal{M}, \inf_{\mathbb{T} \setminus K} M > 0\}.$$

## 2 Complétion des données

Dans le présent contexte du disque unité, rappelons que le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{D} \setminus \sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \Phi & \text{sur } \mathbb{T}, \end{cases} \quad (3)$$

pour un flux  $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$  vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi d\theta = 0,$$

et avec la condition de normalisation

$$\int_{\mathbb{T}} u d\theta = 0.$$

Le problème inverse considéré consiste alors, étant donnée une fonction (bâtie depuis des mesures)  $u_K$  sur  $K \subset \mathbb{T}$ , à déterminer  $\sigma \subset \mathbb{D}$  tel que la solution  $u$  de (3) vérifie :

$$u|_K = u_K.$$

## 2.1 Conjugaison harmonique et fonctions analytiques

La solution  $u$  du problème direct étant harmonique dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ , il existe une fonction  $U$  analytique dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$  telle que  $u = \operatorname{Re} U$ . Celle-ci est définie (à une constante imaginaire pure près) par

$$U = u + i\tilde{u},$$

la fonction  $\tilde{u}$  étant la conjuguée harmonique de  $u$ , voir par exemple [2, section 4.6.1]. Classiquement, une relation entre  $u$  et  $\tilde{u}$  sur le bord est donnée par l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Au vu de la condition de flux nul (fissure isolante) sur  $\sigma$  dans (3), ceci détermine une fonction harmonique monovaluée  $\tilde{u}$  dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ , à une constante près que l'on normalise en imposant la condition  $\tilde{u}(a) = 0$ , en un point fixé  $a$  de  $\mathbb{T}$ . Par conséquent, pour tout  $\xi \in \mathbb{T}$ ,

$$\tilde{u}(\xi) = \int_a^\xi \Phi(e^{i\theta}) d\theta.$$

Ainsi, la fonction  $U$  est connue sur  $K$  puisque  $u$  y est mesurée, tandis que  $\operatorname{Im} U = \tilde{u}$  est disponible (par calcul) sur  $\mathbb{T}$ . Concernant la régularité de  $U$ , les théorèmes de Privalov [15] ou de Carleson-Jacobs [25] assurent que la conjugaison harmonique préserve la régularité hölderienne. Par hypothèse,  $\tilde{u}$ , et donc aussi  $u$  et  $U$ , appartiennent à  $C^{1/2}(\mathbb{T}) \subset \lambda_\alpha(\mathbb{T})$ ,  $\alpha < 1/2$ . En particulier, la fonction  $U$  appartient aux classes de Hardy des fonctions analytiques et bornées dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ . On peut même prouver que :

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{[u](\tau)}{z - \tau} d\tau + g(z), \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \sigma, \quad (4)$$

pour une fonction  $g \in H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ , voir [10].

Le problème inverse s'exprime alors de la façon suivante :

*étant données  $\operatorname{Re} U$  sur  $K$  et  $\operatorname{Im} U$  sur  $\mathbb{T}$ , trouver le lieu  $\sigma$  des singularités de  $U$  dans  $\mathbb{D}$ .*

Comme indiqué plus haut, on attaque ici cette question en deux temps, le premier consistant à trouver une extension de  $U$  (ou de  $\operatorname{Re} U$ ), donnée sur  $K$ , à toute la frontière  $\mathbb{T}$ . En réalité, une telle extension est unique dans les classes de Hardy de  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ , le sous-ensemble  $K \subset \mathbb{T}$  étant de mesure positive.

Nous décrivons dans ce chapitre un procédé de calcul d'une approximation  $U_N$  de  $U$  sur  $\mathbb{T}$ , robuste et convergent dans les classes de Hölder, qui fournit l'extension cherchée. Celui-ci repose sur l'approximation uniforme d'une fonction donnée sur  $K$  par les fonctions méromorphes dans  $\mathbb{D}$  que l'on détaille dans les sections 2.2, pour  $K = \mathbb{T}$ , et 2.3, pour  $K \subset \mathbb{T}$ . L'idée sous-jacente est la "discrétisation" de la singularité  $\sigma$  de  $U$  dans  $\mathbb{D}$  par les pôles de l'approximant  $U_N$  ou, de façon plus générale, la résolution d'un problème aux limites par approximation, non plus de l'opérateur, mais des conditions au bord dans une classe de fonctions appropriée (harmoniques pour le Laplacien).

## 2.2 Problème d'Adamjan-Arov-Krein

Il s'agit-là du problème extrémal suivant, d'approximation méromorphe en norme uniforme sur  $\mathbb{T}$ . Etant donnée une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , peut-on trouver un meilleur approximant  $g_N$  de  $f$  en norme  $L^\infty(\mathbb{T})$  parmi les fonctions méromorphes dans le disque  $\mathbb{D}$  appartenant à  $H^\infty + R_N$  ?

**Problème 1** (AAK) *Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ . On cherche  $g_N \in H^\infty + R_N$  telle que*

$$\|f - g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \min_{g \in H^\infty + R_N} \|f - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Cette question, qui remonte à [1], a suscité depuis de nombreux travaux. On trouvera des résultats la concernant dans [25, 31, 33, 34, 37], notamment. En particulier, ce problème admet une solution unique dès que  $f \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ . Dans ce cas la solution est donnée sous la forme suivante :

$$g_N = f - \frac{\Gamma_h \nu_N}{\nu_N}; \quad (5)$$

où  $\Gamma_f$  est l'opérateur de Hankel de symbole  $f$  donné par

$$\Gamma_f : H^2 \rightarrow \overline{H}_0^2, \quad \Gamma_f v = P_{\overline{H}_0^2}(f v),$$

si  $\overline{H}_0^2$  désigne le complémentaire orthogonal de  $H^2$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ ,  $P_{\overline{H}_0^2}$  la projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{T})$  sur  $\overline{H}_0^2$  et  $\nu_N$  est le  $(N+1)$ ème vecteur singulier de  $\Gamma_f$ . L'erreur, dans ce cas, est circulaire :  $|f - g_N| = \sigma_N$  p.p. sur  $\mathbb{T}$ ,  $\sigma_N$  désignant la  $(N+1)$ ème valeur singulière de  $\Gamma_f$ . On définit alors l'opérateur de meilleure approximation associé :

$$\mathcal{A}_N : H^\infty + C(\mathbb{T}) \rightarrow H^\infty + R_N : \mathcal{A}_N(h) = g_N,$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante :

**Théorème 1 ([33])** *Soit  $f \in \lambda_\alpha(\mathbb{T})$  telle que la  $(N+1)$ ème valeur singulière de  $\Gamma_f$  est simple. Si  $(h_n)_{n \geq 0}$  est une suite de fonction dans  $\lambda_\alpha(\mathbb{T})$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{\alpha, \mathbb{T}} = 0$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_N(h_n) - \mathcal{A}_N(h)\|_{\alpha, \mathbb{T}} = 0.$$

Le fait que l'hypothèse de simplicité de  $\sigma_N$  est "génériquement" vérifiée dans  $\lambda_\alpha(T)$  (c'est à dire pour toutes fonctions d'un sous-ensemble ouvert et dense de  $\lambda_\alpha(T)$ ) est établi dans [13]. Notons au passage que l'opérateur  $\mathcal{A}_N$  est discontinu en tant qu'application de  $H^\infty + C(\mathbb{T})$  dans  $H^\infty + R_N$  [30].

Le problème 1 peut s'interpréter comme une formulation faible du problème inverse considéré ici, tel qu'il est énoncé en début de section 2, dans la situation où les données fournies sur la frontière sont *complètes* et où  $K = \mathbb{T}$ . On trouvera dans [11, 29] des considérations détaillées sur les liens entre  $U$ ,  $\sigma$  et la localisation des pôles des approximants ainsi construits.

## 2.3 Problèmes extrémaux bornés

Lorsque l'on ne dispose de  $f$  que sur un sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{T}$ , accessible aux mesures, ce qui correspond à la situation de la fonction  $U$  introduite en section 2.1, la question concernant la

possibilité d'en trouver une extension sur  $\mathbb{T}$  "proche d'être méromorphe" peut se formuler de la manière suivante. Soit

$$D_{M,\psi} = \{h \in L^\infty(\mathbb{T} \setminus K), |h - \psi| \leq M \text{ p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K\}.$$

**Problème 2 (PCB)** *Etant donnée  $f \in L^\infty(K)$ ,  $\psi \in L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)$  et  $M \in \mathcal{M}$ , et  $N \geq 0$ , on cherche  $h_N \in D_{M,\psi}$  telle que :*

$$d(f \vee h_N, H^\infty + R_N) = \min_{h \in D_{M,\psi}} d(f \vee h, H^\infty + R_N) = \gamma_N(f \vee \psi, M).$$

Il s'agit dans ce cas de compléter  $f$  par une fonction  $h_N$  de  $D_{M,\psi}$  telle que  $f \vee h_N$  soit le plus proche possible en norme  $L^\infty$  de la trace sur  $\mathbb{T}$  d'une fonction méromorphe de  $H^\infty + R_N$ . Cette question a été traitée dans dans [13] où l'on trouve le résultat d'existence et d'unicité suivant. Introduisons l'ensemble :

$$B_{M,\psi}^N = \{g \in H^\infty + R_N, |g - \psi| \leq M \text{ p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K\},$$

et l'ensemble de ses traces sur  $K$  :  $C_{M,\psi}^N = \{g|_K, g \in B_{M,\psi}^N\}$ .

**Théorème 2 ([13])** *Si  $f \vee \psi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  et  $M \in \mathcal{M}$ , alors on a :*

- (i) (PCB) *admet une solution  $h_N$  unique.*
- (ii) *Lorsque  $f \notin C_{M,\psi}^N$ , la fonction  $\psi - h_N$  est de module égal à  $M$  p.p. sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .*

De plus, un algorithme permettant le calcul de  $h_N$  depuis des valeurs de  $f$  sur  $K$  et de  $(\psi, M)$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est disponible dans [13]. La description de cette procédure implique un autre problème d'approximation méromorphe sur  $K$ , le problème extrémal borné (PEB). Celui-ci consiste à chercher une fonction méromorphe dans  $\mathbb{D}$ , contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , dont la trace sur  $K$  est la plus proche possible en norme  $L^\infty$  de  $f$ .

**Problème 3 (PEB)** *Pour  $f \in L^\infty(K)$ ,  $\psi \in L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)$ , et  $M' \in \mathcal{M}$ , on cherche  $g_N \in B_{M',\psi}^N$  telle que :*

$$\|f - g_N\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in B_{M',\psi}^N} \|f - g\|_{L^\infty(K)} = \beta_N(f \vee \psi, M'). \quad (6)$$

Lorsque  $f \vee \psi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  et  $M' \in \mathcal{M}_*$ , l'existence et l'unicité de la solution  $g_N$  sont assurées par [13, thms 2 et 5], ainsi que les égalités suivantes si  $f \notin C_{M',\psi}^N$  :  $|f - g_N| = \beta_N$  et  $|\psi - g_N| = M'$  p.p. sur  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$ , respectivement.

Dans ce type de problèmes, il est indispensable d'introduire une contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$  pour éviter les problèmes d'instabilité suivants, qui surviennent déjà dans le cas analytique où  $N = 0$  [12, prop. 2]. Si  $(g_p)$  désigne une suite de fonctions de  $H^\infty$  telle que  $g_p|_K$  converge vers  $f$  dans  $L^\infty(K)$  et si  $f$  n'est pas déjà la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^\infty$ , alors  $\|g_p\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \rightarrow \infty$ . En particulier, lorsque  $f \in H|_K^\infty + C(K)$ , une telle suite  $(g_p)$  existe, et la propriété précédente traduit le fait que les problèmes (PCB) et (PEB) sont mal posés en l'absence de contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Ce n'est plus le cas, en revanche, après adjonction d'une contrainte en norme ou en module sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Pour  $\rho \in L^\infty(\mathbb{T})$  à valeurs positives telle que  $\log \rho \in L^1(\mathbb{T})$ , introduisons la fonction extérieure  $w_\rho$  appartenant à  $H^\infty$ , de module égal à  $\rho$  en presque tout point de  $\mathbb{T}$  définie par [22, 25, 27, 35] :

$$w_\rho(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \rho(e^{it}) dt \right\}.$$

On observe que si  $\inf_{\mathbb{T}} \rho > 0$ , alors  $w_\rho$  est inversible dans  $H^\infty$  et  $w_\rho^{-1} = w_{1/\rho}$ . Lorsque  $f \vee \psi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  et si  $f \notin C_{M,\psi}^N$ , on peut calculer les solutions  $h_N$  et  $g_N$  de (PCB) et (PEB) comme suit, voir aussi [13] et la section 3.1.

- Calcul de  $\gamma_N = \gamma_N(M)$  par résolution de problèmes de type (AAK) :  $\gamma_N(M)$  coïncide avec l'unique  $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\min_{v \in H^\infty + R_N} \|(f \vee \psi) w_{\gamma \vee (M+\gamma)}^{-1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1.$$

On a alors  $\beta_N(M + \gamma_N(M)) = \gamma_N(M)$ . Soit  $v_N$  l'unique solution (voir (5)) de

$$\min_{v \in H^\infty + R_N} \|(f \vee \psi) w_{\gamma_N \vee (M+\gamma_N)}^{-1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(f \vee \psi) w_{\gamma_N \vee (M+\gamma_N)}^{-1} - v_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

- Les solutions  $h_N$  et  $g_N$  de (PCB) et (PEB) sont alors données par :

$$h_N = \frac{M}{M + \gamma_N} v_N w_{\gamma_N \vee (M+\gamma_N)} + \left(1 - \frac{M}{M + \gamma_N}\right) \psi,$$

$$g_N = v_N w_{\gamma_N \vee (M+\gamma_N)}.$$

Un résultat de convergence générique de cet algorithme de calcul pour  $h_N$  a été prouvé dans [3] pour des données  $(f \vee \psi, M)$  appartenant au sous-ensemble ouvert dense  $\mathcal{U}$  de  $\lambda_\alpha(\mathbb{T}) \times \lambda_\alpha^{+,0}(\mathbb{T} \setminus K)$  :

$$\mathcal{U} = \{(G, M) \in \lambda_\alpha(\mathbb{T}) \times \lambda_\alpha^{+,0}(\mathbb{T} \setminus K) / \gamma_N(G, M) \neq 0 \text{ et } \sigma_N(\Gamma_{G w_{\gamma_N \vee (\gamma_N + M)}^{-1}}) \text{ simple}\}. \quad (7)$$

Dans ce cas, la solution  $h_N$  appartient à  $\lambda_\alpha(\mathbb{T} \setminus K)$  et la convergence a lieu en norme  $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{T} \setminus K}$ , voir section 3.2.

## 2.4 Retour à l'extension des données

Comme nous l'avons indiqué plus haut, l'introduction d'une contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est indispensable pour le calcul robuste et stable d'une approximation  $U_N$  de  $U$  sur  $\mathbb{T}$ . En effet, les données dont on dispose sur  $K$  sont expérimentales ou calculées et ne permettent de bâtir sur  $K$  qu'une approximation de  $U$  qui, elle, ne coïncide pas exactement avec la trace d'une fonction analytique dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ , bien qu'elle puisse en être très proche. De plus, on déduit de l'expression (4) de  $U$  qu'elle n'appartient pas au sous-ensemble  $H^\infty + R_N$  de  $H^\infty + C(\mathbb{T})$ . Dans la mesure où l'on suppose ici connue  $\text{Im } U$  sur  $\mathbb{T}$ , il serait naturel d'imposer à  $\text{Im } U_N$  d'en être proche sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Si des problèmes extrémaux avec de telles contraintes sont maintenant résolus dans  $H^2$ , voir [28], leur étude dans  $H^\infty + R_N$  est plus difficile et reste à mener. En attendant, l'idée consiste à faire le changement de variable suivant, par passage à l'exponentielle. La fonction

$$F = \exp(iU),$$

reste analytique dans  $\mathbb{D} \setminus \sigma$ , et est encore connue sur  $K$  cependant que, sur  $\mathbb{T}$ , on a

$$|F| = |\exp(iU)| = \exp(-\text{Im } U).$$

Ainsi, la contrainte naturelle sur la partie imaginaire de  $U$  et de ses approximations :

$$\text{Im } U \approx \int \Phi,$$

s'exprime au travers du module de  $F$  :

$$|F| \approx \exp \left( - \int \Phi \right).$$

On se ramène ainsi à la recherche d'une complétion  $H_N$  de  $F$  à tout  $\mathbb{T}$  sujette à une contrainte sur son module, et donc à la recherche d'une solution  $H_N$  du problème 2 associée à  $f = F$  sur  $K$  et  $\psi = 0$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . A la suite de ce calcul,  $U_N = -i \log H_N$  fournit l'extension souhaitée.

### 3 Algorithmes d'identification de fissures

Nous précisons ici l'algorithme mis en œuvre pour le calcul de l'extension  $U_N$ , ainsi que certaines de ses propriétés et des simulations numériques, On supposera que  $K$  est un arc de  $\mathbb{T}$ , bien que les considérations qui suivent restent valables dans le cas d'une union finie d'arcs.

#### 3.1 Description des procédures

On considère maintenant une partie  $K^\varepsilon \subsetneq K$ , pour  $\varepsilon$  petit, mesure de  $K \setminus K^\varepsilon$ , et l'on fixe  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ . L'algorithme d'identification de fissures que nous proposons procède en plusieurs étapes.

0. A partir des données  $\Phi$  sur  $\mathbb{T}$ ,  $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ , et  $u_K$  sur  $K$ , construire<sup>1</sup> les fonctions

$$\begin{cases} F &= \exp(iU) = \exp i(u_K + i \int \Phi) & \text{dans } \lambda_\alpha(K^\varepsilon), \\ M &= |F| = \exp(-\int \Phi) & \text{dans } \lambda_\alpha^+(\mathbb{T} \setminus K^\varepsilon). \end{cases}$$

Bâtir un polynôme  $P_0$  qui s'annule ainsi que sa dérivée aux extrémités  $z_\pm^\varepsilon$  de  $K^\varepsilon$  mais pas sur  $\mathbb{T} \setminus K^\varepsilon$ .

1. Pour  $N > 0$ , calculer la solution  $h_N$  du problème (PCB) associée à  $F_0 = P_0 F \in \lambda_\alpha(K^\varepsilon)$ , à la contrainte  $M_0 = |P_0| M \in \lambda_\alpha^{+,0}(\mathbb{T} \setminus K^\varepsilon)$  et à  $\psi = 0$  (de sorte que  $F_0 \vee \psi \in \lambda_\alpha(\mathbb{T})$ ), en utilisant la procédure développée dans [13], voir aussi section 2.3, et dont la mise en œuvre effective se fait comme suit. *i)* Construire un approximant rationnel  $r$  de  $F_0 \vee 0$  dans  $\lambda_\alpha(\mathbb{T})$ .

*ii)* Trouver l'unique réel  $\gamma > 0$  tel que la  $(N+1)$ ème valeur singulière  $\sigma_N$  de l'opérateur de Hankel  $\Gamma_\gamma$  de symbole  $r w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)}^{-1}$  vérifie :

$$\sigma_N(\Gamma_\gamma) = 1.$$

*iii)* Construire l'approximant AAK  $v_N$  de  $r w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)}^{-1}$  dans  $H^\infty + R_N$  donné par l'expression (5) :

$$v_N = r w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)}^{-1} - \frac{\Gamma_\gamma \nu_N}{\nu_N},$$

si  $\nu_N$  désigne le vecteur singulier de  $\Gamma_\gamma$  associé à  $\sigma_N$ . *iv)* Calculer sur  $\mathbb{T} \setminus K^\varepsilon$

$$h_N = \frac{M_0}{\gamma + M_0} v_N w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)} + \frac{\gamma}{\gamma + M_0} r = r - \frac{M_0}{\gamma + M_0} w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)} \frac{\Gamma_\gamma \nu_N}{\nu_N}.$$

---

1. On ne discutera pas ici les possibilités de construction de ces fonctions  $F$  et  $M$ , qui dépendent de la nature des données et doivent elles-mêmes garantir une forme appropriée de convergence, voir [14, 32] pour ces questions.

**2.** Calculer sur  $\mathbb{T} \setminus K \subset \mathbb{T} \setminus K^\varepsilon$

$$u_N = -i \log \left[ M^{-1} \frac{h_N}{P_0} \right],$$

la détermination choisie du log étant telle que  $u_N$  et  $u_K$  coïncident à l'une des extrémités de  $K$ . La fonction  $\mathcal{U}_N = u_K \vee u_N$  fournit une extension à  $\mathbb{T}$  des données – et donc une solution approchée de (3). Notons qu'elle dépend, notamment, du choix des paramètres  $r$ ,  $\varepsilon$  et  $N$ .

**3.** Appliquer l'algorithme (RGE), introduit à la section 1.2, voir [17], pour l'identification de la fissure supposée rectiligne à la fonction  $\mathcal{U}_N$  issue de l'étape **2.**. Il s'agit de :

*i)* Calculer l'équation de la droite  $D$  contenant  $\sigma$  par détermination de sa normale  $n_\sigma$  et de sa position par rapport à  $n_\sigma$ . Si l'on désigne par  $(v_k)_{k=1,2}$  les fonctions définies par  $v_k(x_1, x_2) = x_k$ , où  $(x_1, x_2)$  sont les coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^2$  et si l'on note  $L_k = RG(v_k)$ , que l'on calcule au moyen de l'expression (2) appliquée à  $u = \mathcal{U}_N$ , alors les coordonnées de  $n_\sigma$  sont données par :

$$\frac{L_k}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad k = 1, 2.$$

Perpendiculairement à  $n_\sigma$ , la position de  $D$  est donnée par la valeur de la constante :

$$\frac{RG(p)}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad \text{avec } p(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2).$$

*ii)* On définit la fonctionnelle

$$J : (x_a, x_b) \mapsto RG^2(w_{\tilde{\sigma}}),$$

$x_a$  et  $x_b$  étant les abscisses des extrémités  $a$  et  $b$  de  $\tilde{\sigma}$ , avec

$$w_{\tilde{\sigma}}(z) = \text{Im}(z - a)^{3/2} (z - b)^{3/2}, \quad z \in \Omega \setminus \tilde{\sigma}.$$

La localisation de la fissure  $\sigma$  sur la droite  $D$  se fait comme suit :

1. Choisir un état initial  $(x_a^0, x_b^0)$ .

2. Trouver  $x_a^{k+1}$  tel que:

$$J(x_a^{k+1}, x_b^k) = \min_{c_1 \leq \tau \leq c_2} J(\tau, x_b^k)$$

3. Trouver  $x_b^{k+1}$  tel que:

$$J(x_a^{k+1}, x_b^{k+1}) = \min_{c_1 \leq \xi \leq c_2} J(x_a^{k+1}, \xi).$$

Les bornes  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes déterminées de sorte que les segments  $(\tau, x_b^k)$  et  $(x_a^{k+1}, \xi)$  soient contenus dans  $D \cap \mathbb{D}$ . On utilise la méthode “du nombre d'Or” pour la minimisation scalaire.

4. Evaluer  $\| (x_a^{k+1}, x_b^{k+1}) - (x_a^k, x_b^k) \|$ . Si cette quantité est suffisamment petit alors  $\tilde{\sigma} \approx \sigma$  et  $(x_a^{k+1}, x_b^{k+1})$  correspond aux extrémités de  $\sigma$  sur  $D$ ; sinon, reprendre à l'étape 2 avec  $k \leftarrow k + 1$ .

### 3.2 Etude de la convergence

L'idée ici est d'indiquer en quel sens le procédé décrit ci-dessus est convergent ou continu et permet effectivement le calcul d'une position pour la fissure proche de sa position réelle,  $\sigma$ . Nous établissons une propriété de convergence *générique* des étapes **1.** et **2.** de l'algorithme décrit en section 3.1, autrement dit le fait qu'elles permettent de calculer une fonction  $\mathcal{U}_N$  proche de la solution  $u$  de (3), au moins pour une large classe de données. Concernant les propriétés de convergence de l'étape **3.** de l'algorithme parler, nous référons à [17]; celles-ci sont cependant illustrées par les résultats numériques des sections suivantes.

Rappelons que l'extension  $\mathcal{U}_N$  des données calculée au point **2.** dépend des paramètres  $N$ ,  $\varepsilon$  et  $r$ ; on désignera par  $d_r$  le degré de  $r$ .

**Proposition 1** *Génériquement,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty, d_r \rightarrow \infty} \|u - u_N(r, \varepsilon)\|_{\alpha, \mathbb{T} \setminus K} = 0.$$

La validité générique de ce résultat est relative à l'appartenance de  $(F_0 \vee 0, M_0)$  au sous-ensemble *ouvert et dense*  $\mathcal{U}$  de  $\lambda_\alpha(\mathbb{T}) \times \lambda_\alpha^{+,0}(\mathbb{T} \setminus K)$  défini par (7), voir [13]. Celle-ci est garantie par l'appartenance du flux  $\phi$  à un sous-ensemble ouvert et dense de  $L^2(\mathbb{T})$  et le fait que si  $f_1 \in \lambda_\alpha(K)$  et  $f_2 \in \lambda_\alpha(\mathbb{T} \setminus K)$  coïncident aux extrémités de  $K$ , alors  $f_1 \vee f_2 \in \lambda_\alpha(\mathbb{T})$ .

*Preuve:* tout d'abord observons que, avec les déterminations adaptées du logarithme, on a sur  $\mathbb{T} \setminus K$ ,

$$u - u_N = i(\log h_N - \log F_0).$$

Etablissons donc le fait que, puisque  $F_0 \in H^\infty(\mathbb{D} \setminus \sigma) \cap \lambda_\alpha(\mathbb{T})$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty, d_r \rightarrow \infty} \|F_0 - h_N(r, \varepsilon)\|_{\alpha, \mathbb{T} \setminus K^\varepsilon} = 0.$$

Soit  $g_N = g_N(r, \varepsilon)$  la solution de (PEB) associée aux quantités  $K^\varepsilon$ ,  $r$  et  $M'_0 = M_0 + \gamma$  introduites dans l'étape **1.** de l'algorithme. On a  $g_N = v_N w_{\gamma \vee (\gamma + M_0)}$  et

$$h_N - g_N = \frac{\gamma}{\gamma + M_0} (g_N + r) \text{ sur } \mathbb{T} \setminus K^\varepsilon.$$

Ainsi, puisqu'avec les hypothèses de régularité hölderienne des fonctions  $F_0$  et  $M_0$ , la quantité  $\gamma \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  [13], on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|h_N - g_N\|_{\alpha, \mathbb{T} \setminus K^\varepsilon} = 0.$$

De plus, dans ce cas,

$$\lim_{N \rightarrow \infty, d_r \rightarrow \infty} \|F_0 - g_N\|_{\alpha, \mathbb{T}} = 0. \quad (8)$$

En effet, il existe une suite de fonctions rationnelles  $(r_m)_{m \geq 0}$  de degré  $m$  (polynômes trigonométriques de type Jackson ou De La Vallée Poussin, voir [14, 32] et leurs références) qui converge vers  $F_0$  dans  $\lambda_\alpha(\mathbb{T})$ . Posons  $\psi_m = r_m - F_0$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . On constate tout d'abord que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|r_m \vee \psi_m - F_0 \vee 0\|_{\alpha, \mathbb{T}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|r_m - F_0\|_{\alpha, \mathbb{T}} = 0.$$

Si l'on note  $g_{N,m}$  la solution du problème (PEB) sur  $K^\varepsilon$ , associée à  $r_m$  sur  $K^\varepsilon$ ,  $\psi_m$ , et  $M_m = M_0 + \gamma_N(r_m \vee \psi_m, M_0)$  sur  $\mathbb{T} \setminus K^\varepsilon$ , on montre grâce aux résultats de continuité de [13] et au théorème 1 que *génériquement* (pour tout  $(F_0 \vee 0, M_0) \in \mathcal{U}$ ),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_{N,m} - g_N\|_{\alpha, \mathbb{T}} = 0.$$



Finalement,

$$\|F_0 - g_N\|_{\alpha, \mathbb{T}} \leq \|F_0 - r_m\|_{\alpha, \mathbb{T}} + \|r_m - g_{N,m}\|_{\alpha, \mathbb{T}} + \|g_{N,m} - g_N\|_{\alpha, \mathbb{T}}.$$

Pour  $N$  suffisamment grand ( $N \geq m$ )  $r_m$  appartient à la classe  $B_{M_m, \psi_m}^N$  des approximaants  $g_{N,m}$  auquel cas  $r_m = G_{N,m}$ . Le passage aux limites en  $N$  et en  $m$  à l'infini établit (8) et achève la démonstration. ■

### 3.3 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les tests numériques des algorithmes de complétion de données et d'identification de fissure.

Les données d'entrée sont simulées numériquement. Sur le disque unité  $\mathbb{D}$  privé d'un segment intérieur  $\sigma$  représentant la fissure, on résout l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$  par une méthode d'éléments finis. Comme dans (3), la fissure  $\sigma$  est supposée parfaitement isolante et le flux de chaleur  $\Phi$  est imposé sur  $\mathbb{T}$  par une condition au bord de type Neumann. On choisit ici :

$$\Phi = \begin{cases} -1 & \text{sur } [0, \pi) \\ 1 & \text{sur } [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Ceci permet de se doter de la mesure  $u_K$  de la solution sur la partie  $K$  de la frontière  $\mathbb{T}$  supposée accessible. Sauf mention expresse du contraire, on prendra  $K = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . On peut alors appliquer la procédure telle qu'elle est décrite en section 3.1. L'algorithme d'approximation dans  $H^\infty + R_N$  (étapes **0.** à **2.**) est développé en MATLAB, l'algorithme (RGE) – pour l'identification de  $\sigma$  à partir des données complétées (étape **3.**) – en FORTRAN.

La figure 1 représente les différentes étapes de la mise en oeuvre de cette procédure. Le schéma (1.1) montre la température sur  $\mathbb{T}$  et l'intégrale de flux associée. On représente en (1.2) les lignes de niveaux (iso-valeurs) de la solution  $u$ . Insistons sur le fait que seule la trace  $u_K$  sur  $K$  de la température est supposée connue pour le déroulement de l'algorithme. Le schéma (1.3) montre le lieu de Nyquist de la fonction  $F_0$  sur  $K$ . Il s'agit de la représentation  $(\operatorname{Re} F_0(e^{i\theta}), \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}))$  paramétrée par  $\theta \in K$ . Le schéma (1.4) montre la contrainte  $M_0$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . L'approximation dans  $H^\infty + R_N$  fournit alors la fonction  $F_0 \vee h_N$  sur tout le cercle  $\mathbb{T}$ ; son lieu de Nyquist est représenté sur le schéma (1.5). Ici  $N = 38$  et  $\sigma$  est le segment  $(0, 0.4)$ . Le schéma (1.6) montre la fonction  $u_N$  reconstituée sur  $\mathbb{T} \setminus K$  avec  $\varepsilon = 0$ . On constate un "mauvais" comportement aux extrémités de  $K$ , dû à la division par  $P_0$  dont les valeurs en ces points sont nulles.

En revanche, l'introduction dans l'algorithme d'un paramètre  $\varepsilon > 0$  permet de n'avoir à calculer  $u_N$  que suffisamment loin des zéros de  $P_0$  (qui se situent sur  $\partial K^\varepsilon$ , à distance  $\varepsilon$  de  $\mathbb{T} \setminus K$ ), et fournit une meilleure solution représentée par le schéma (1.7). Ici  $\varepsilon$  vaut 5% de la mesure de  $K$ , l'erreur commise sur  $\mathbb{T} \setminus K$  par rapport à la vraie fonction  $u$  est inférieure à 3% en norme  $L^\infty$  et à 2% en norme  $L^2$ . Finalement, l'algorithme (RGE) reconstruit la fissure  $\sigma$  comme indiqué au test (1.8), avec une erreur inférieure à 2% sur sa longueur et 3% sur la position de son centre.

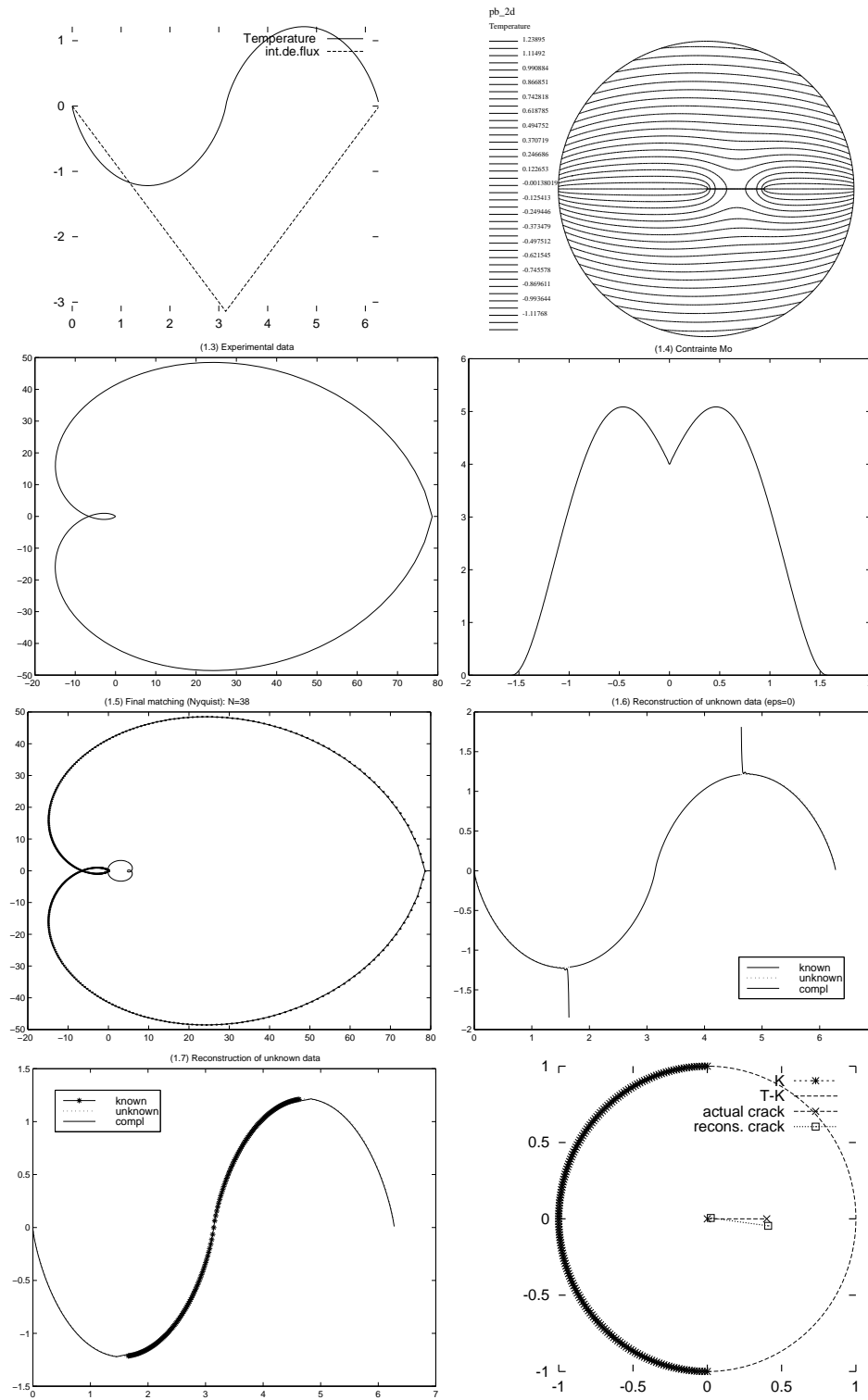


FIG. 1 – Complétion des données et identification de la fissure.

### 3.3.1 Influence du nombre $N$ de pôles

Ceci section concerne l'étude numérique de l'erreur commise dans la phase de complétion des données en fonction du nombre de pôles  $N$  de l'approximant rationnel. Les deux premiers dessins de la figure 2 montrent le comportement de  $u_8$  et de  $u_{38}$ . La valeur de  $\gamma_N$  en fonction de  $N$  est représentée dans le troisième schéma. Pour  $N \geq 30$ ,  $\gamma_N \leq 10^{-3}$  et l'on aboutit à de bonnes approximations, d'après les courbes d'erreurs (relatives) sur  $\mathbb{T} \setminus K$  données en norme  $L^\infty$  et en norme  $L^2$  au dernier schéma de la figure 2. Notons en passant que la décroissance de  $\gamma_N$  et de l'erreur sur  $\mathbb{T} \setminus K$  en fonction de  $N$  est sensiblement plus rapide dans le cas d'une fissure conductrice où la solution  $u$  est plus régulière dans  $\mathbb{D}$ . De plus, un critère approprié au choix de la valeur de  $N$  est fourni par le comportement du ratio  $\gamma_N/\gamma_{N+1}$  (plutôt que par celui de la valeur de  $\gamma_N$ ).

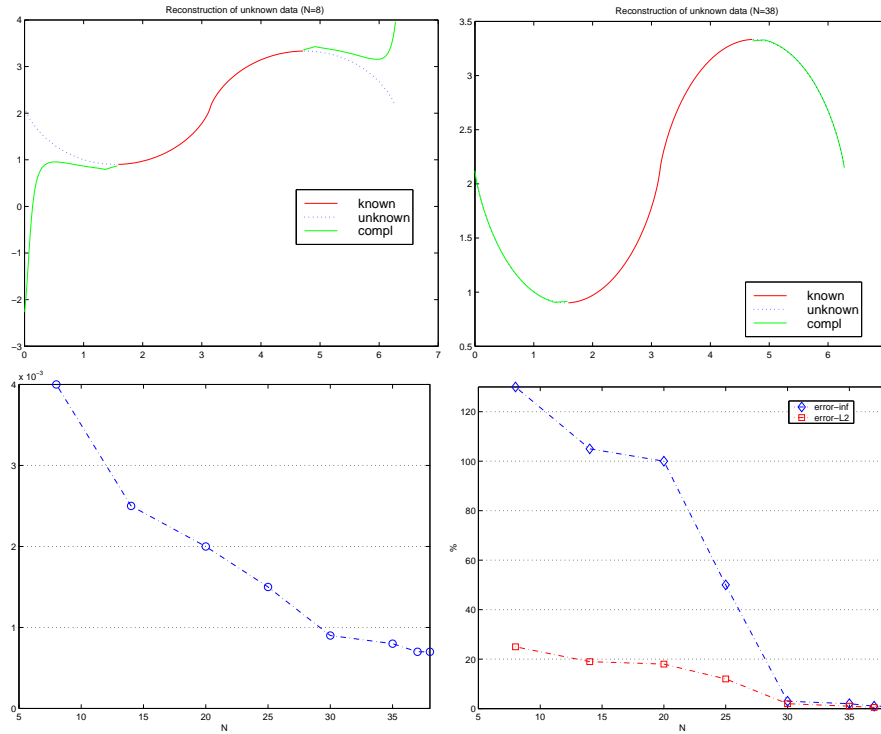


FIG. 2 – Erreur en complétion en fonction de  $N$ .

### 3.3.2 Etude par rapport à la position de la $\sigma$ et de $K$

Dans la suite de cette étude on a  $N = 38$ . La figure 3 représente un cas où la fissure  $\sigma$  n'est pas portée par l'axe réel. Des résultats intéressants sont obtenus, une erreur inférieure à 2% sur  $\mathbb{T} \setminus K$  pour la mesure complétée, inférieure à 5% sur la longueur et la position du centre de la fissure reconstruite. La figure 4 montre des exemples de fissures proches du bord  $\mathbb{T}$  du domaine. Les résultats sont très satisfaisants pour deux situations assez différentes:  $K = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  ( $\sigma$  est proche de la partie accessible aux mesures  $K$ ) puis  $K = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $\sigma$  est proche de  $\mathbb{T} \setminus K$ , partie où la solution est complétée). L'erreur trouvée sur la position de la fissure (longueur et centre) ne dépasse pas 4%. Afin d'étudier la sensibilité des données complétées par rapport à la position de la fissure, on représente dans la figure 5 les courbes d'erreurs entre  $u$  et  $u_N$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ ,

selon différentes positions de  $\sigma$  sur  $(-1,1)$ , avec une longueur constante et  $K = [-\pi/3, \pi/3]$ . Ces courbes sont tracées en fonction de la distance de  $\sigma$  à la partie accessible  $K$ . On constate que la complétion n'est pas très sensible à la position, l'erreur ne dépassant pas 5% en norme  $L^\infty$ .

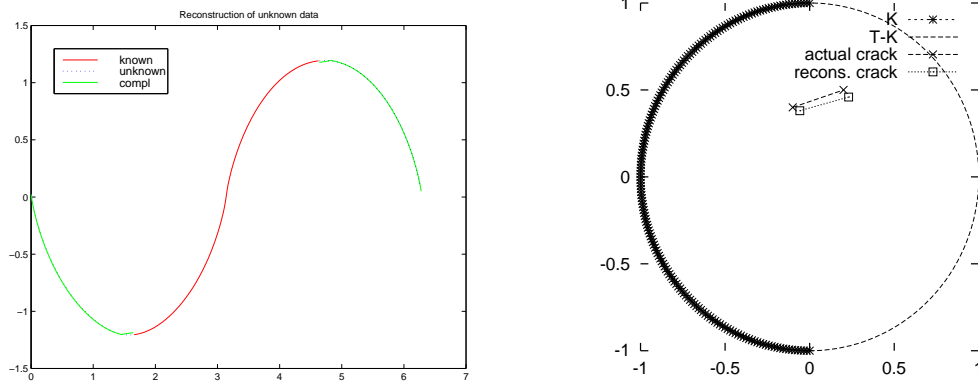


FIG. 3 – Fissure non portée par  $\mathbb{R}$ .

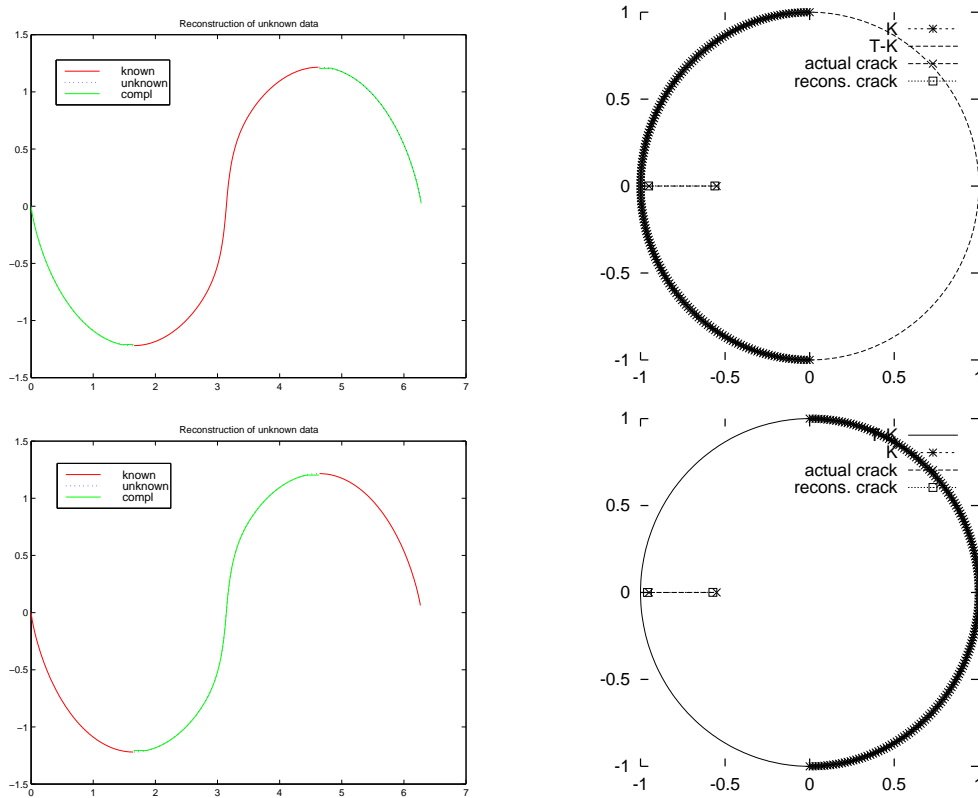


FIG. 4 – Fissure proche du bord (de  $K$  puis de  $\mathbb{T} \setminus K$ ).

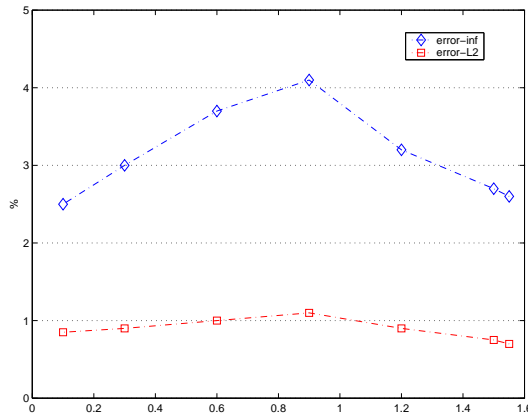


FIG. 5 – *Sensibilité par rapport à la position  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}$ .*

### 3.3.3 Stabilité par rapport au bruit

Ce paragraphe est consacré à une étude numérique de la robustesse de notre algorithme. Pour cela on perturbe les données par un bruit additif aléatoire. Plusieurs tests ont été menés pour différentes valeurs du rapport signal/bruit : les résultats obtenus sont représentés pour des taux de bruit de 0%, 2%, 5% et 10% de la norme uniforme de la fonction  $U$  sur  $K = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , pour  $\sigma = (0, 0.4)$ . Il s'agit donc à la fois d'une température et d'un flux bruité, donnés respectivement sur  $K$  et sur  $\mathbb{T}$ .

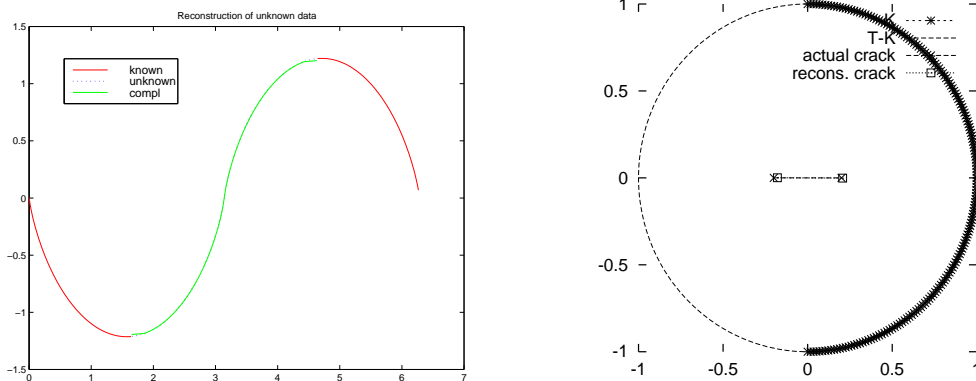
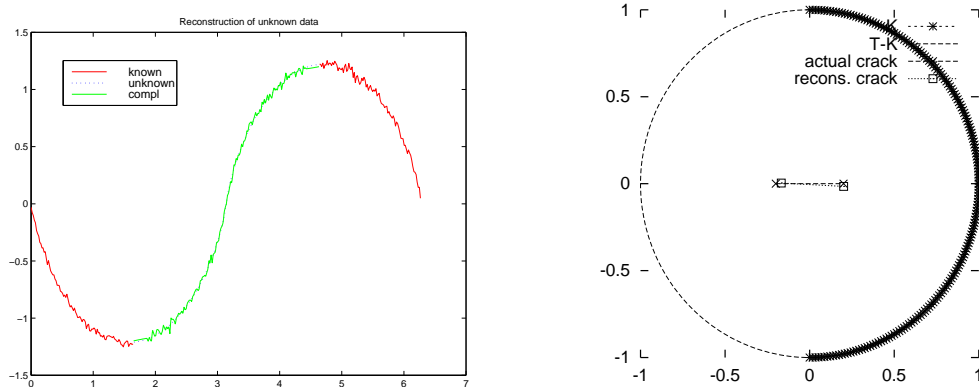
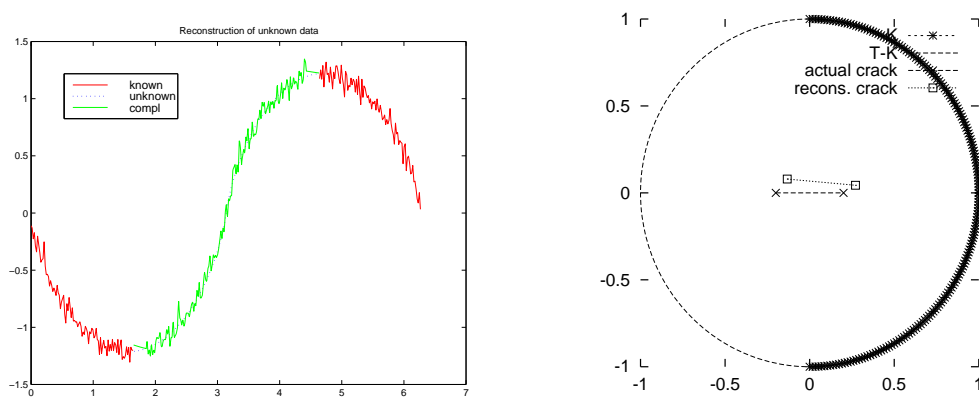
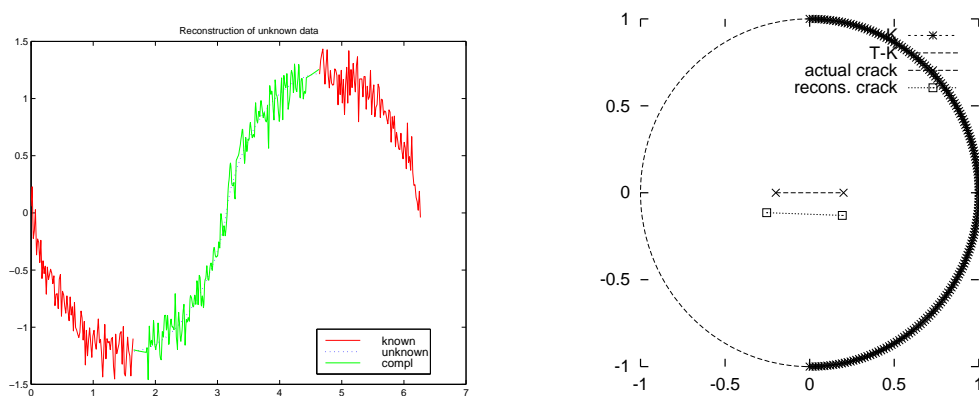


FIG. 6 – *Reconstruction sans bruit (err. longueur  $\simeq 3\%$ , err. centre  $\simeq 1\%$ ).*

FIG. 7 – *Bruit à 2% (err. longueur  $\simeq 7\%$ , err. centre  $\simeq 2\%$ ).*FIG. 8 – *Bruit à 5% (err. longueur  $\simeq 1\%$ , err. centre  $\simeq 9\%$ ).*FIG. 9 – *Bruit à 10% (err. longueur  $\simeq 11\%$ , err. centre  $\simeq 12\%$ ).*

On constate alors numériquement que cette procédure de complétion des données est suffisamment stable puisque l'erreur trouvée sur l'extension à  $\mathbb{T} \setminus K$  est contrôlée par celle effectuée sur la partie de mesure  $K$ . Les résultats obtenus concernant la reconstruction de la fissure restent

aussi concluants. Par ailleurs, on observe que la méthode utilisée pour la détermination de la droite  $D$  contenant la fissure est plus sensible au bruit que les étapes de complétion ou de détermination des extrémités de  $\sigma$  sur  $D$ .

## 4 Conclusion

Ce type de méthodes d'approximation, permettant d'étendre des mesures incomplètes, peut s'appliquer à la résolution de différents problèmes inverses d'identification de coefficients ou de géométries pour le Laplacien 2D, voir par exemple [20]. Il est aussi possible et intéressant d'exploiter *directement* la forme intégrale (singulière) fournie par (4) de la solution de (1), afin de localiser  $\sigma$  en considérant les pôles des approximants méromorphes uniformes ou rationnels  $L^2$  de  $U$  sur  $\mathbb{T}$ . En effet, le comportement de ceux-ci est en rapport avec la position des extrémités de  $\sigma$ , comme le montrent les résultats récents de [10, 11, 29]. De plus, l'utilisation des résultats de [28] permettant l'extension dans l'espace de Hardy  $H^2$  avec contrainte sur la partie imaginaire, suivis par une étape d'approximation rationnelle, pourraient permettre de résoudre le présent problème plus efficacement.

## Références

- [1] V.M. Adamjan, D.Z. Arov, M.G. Krein. *Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur–Takagi problem*. Math. USSR Sbornik, 15, pp. 31-73, 1971.
- [2] L.V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill, 1966.
- [3] G. Alessandrini. *Stable determination of a crack from boundary measurements*. Proc. Royal Soc. edinburgh Sect., A123, pp. 497-516, 1993.
- [4] G. Alessandrini, E. Dibenedetto. *Determining 2 dimensional cracks in 3 dimensional bodies: uniqueness and stability*. Indiana Univ. Math. J., 46, pp. 1-82, 1997.
- [5] G. Alessandrini, A.D. Valenzuela. *Unique determination of multiple cracks by two measurements*. SIAM J. Control Optim. , 34, pp. 913-921, 1996.
- [6] G. Alessandrini, E. Beretta, F. Santosa, S. Vessela. *Stability in crack determination from electrostatic measurements at the boundary — a numerical investigation*. Inverse Problems, 11, pp. L17-L24, 1995.
- [7] S. Andrieux, A. Ben Abda. *Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae*. Inverse Problems, 12, pp. 553-563, 1996.
- [8] S. Andrieux, A. Ben Abda, M. Jaoua. *On the inverse emergent plane crack problem*. Math. Methods in the the Appli. Sci., 21 , pp. 895-906, 1998.
- [9] T. Bannour, A. Ben Abda, M. Jaoua. *A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks*. Inverse Problems, 13, pp. 899-917, 1997.
- [10] L. Baratchart, J. Leblond, F. Mandréa, E.B. Saff. *How can the meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacian*. Inverse Problems, 15, pp. 79-90, 1999.
- [11] L. Baratchart, R. Küstner, F. Mandréa, V. Totik. *Zero distribution via orthogonality*. En préparation, 2001.
- [12] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington. *Hardy approximation to  $L^\infty$  functions on subsets of the circle*. Constructive Approximation, 12, pp. 423-436, 1996.

- [13] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington. *Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions*. Constructive Approximation, 16 (3), pp. 333-357, 2000.
- [14] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, N. Torkhani. *Robust identification in the disc algebra from band-limited data*. IEEE Trans. Automat. Control, 42, pp. 1318-1325, 1997.
- [15] H.G.W. Begehr. *Complex analytic methods for partial differential equations*. World Scientific, 1994.
- [16] A. Ben Abda, H. Ben Ameur, M. Jaoua. *Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements*. Inverse Problems, 15, pp. 67-77, 1999.
- [17] A. Ben Abda, M. Kallel. *Reciprocity gap principle and cracks identification algorithms*. ENIT-LAMSIN rapport de recherche No 99-03, 1999.
- [18] K. Bryan, M. Vogelius. *A uniqueness result concerning the identification of a collection of cracks from finitely many electrostatic boundary measurements*. SIAM J. Math. Anal., 23 (4), 1992.
- [19] S. Chaabane. *Etude de quelques problèmes inverses*. Thèse de Doctorat, ENIT, Tunis, 1999.
- [20] S. Chaabane, M. Jaoua, J. Leblond. *Parameter identification for Laplace equation and approximation in analytic classes*. En préparation.
- [21] G. Chen and J. Zhou. *Boundary element methods*. Computational mathematics and applications. Academic Press, 1992.
- [22] P.L. Duren. *Theory of  $H^p$  spaces*. Academic Press, 1970.
- [23] A.R. Elcrat, V. Isakov, O. Neculoiu. *On finding a surface crack from boundary measurements*. Inverse problems, 11, pp. 343-351, 1995.
- [24] A. Friedman, M. Vogelius. *Determining cracks by boundary measurements*. Indiana Univ. Math. J., 38 (3), 1989.
- [25] J.B. Garnett. *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, 1981.
- [26] H. Helson. *Harmonic Analysis*. Addison-Wesley, 1983.
- [27] K. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions*. Dover, 1988.
- [28] B. Jacob, J. Leblond, J.-P. Marmorat, J.R. Partington. *A constrained approximation problem arising in parameter identification*. Submitted, 2001.
- [29] F. Mandréa. *Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphes : application aux problèmes inverses du Laplacien 2D*. Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.
- [30] M. Papadimitrakakis. *Continuity of the operator of best uniform approximation by bounded analytic functions*. Bull. London Math. Soc., 25, pp. 44-48, 1993.
- [31] J.R. Partington. *An introduction to Hankel operators*. Cambridge University Press, 1988.
- [32] J.R. Partington. *Interpolation, identification, and sampling*. Oxford University Press, 1997.
- [33] V.V. Peller. *Hankel operators and continuity properties of the operators of best approximation*. Leningrad Math. J., 2 (1), pp. 139-160, 1991.
- [34] S.C. Power. *Hankel operators on Hilbert space*. Pitman, Boston, 1982.
- [35] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw Hill, 1982.
- [36] F. Santosa, M. Vogelius. *A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements*. Int. J. Eng. Sci., 29, pp. 917-937, 1991.
- [37] N.J. Young. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press, 1988.





---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399